

**Beschreibung
PROGRAMMKASSETTE R 0153
WISSENSCHAFT UND TECHNIK
KLEINCOMPUTER robotron Z 9001**

Die Seite A der PROGRAMMKASSETTE R 0153 enthält 2 BASIC-Programme zur Nullstellenbestimmung skalarer Funktionen und Polynome und 1 BASIC-Programm zur nichtlinearen Regression. Für alle 3 Programme ist ein RAM-Erweiterungsmodul oder der BASIC-Zusatzmodul notwendig. Die Seite B können Sie für eigene Programme verwenden

Kassetteninhalt (Seite A)

Programm-name	Kurzbezeichnung	Länge, ca (byte)	Zählerstand ¹⁾
K+FUNKNU	Nullstellenbestimmung skalarer Funktionen	8400
R+POLYNU	Nullstellenbestimmung von Polynomen	6900
R+NLREG	Nichtlineare Regression	9200
R+FUNKNU	Nullstellenbestimmung skalarer Funktionen	8400
R+POLYLAU	Nullstellenbestimmung von Polynomen	6900
R+NLREG	Nichtlineare Regression	9200

Das Laden eines BASIC-Anwenderprogramms in den Computer ist im Abschnitt 3.3 des Programmierhandbuches beschrieben.

¹⁾ Bitte den jeweiligen Zählerstand selbst ermitteln und eintragen. Der Programmumfang ist am Vorton (etwa 5 Sekunden) der Programme zu erkennen.

R+FUNKNU

Kurzbezeichnung

Berechnung von Nullstellen skalarer Funktionen

Voraussetzungen

BASIC-ROM-Modul bzw. ein RAM-Erweiterungsmodul

Inhaltsbeschreibung

Das Programm berechnet für eine auf einem reellen Intervall [a,b] definierte Funktion f eine Nullstelle. Nach der Definition von f und der Festlegung von a und b wird die Funktion im Intervall [a,b] zunächst skizziert (Print-Plot). Folgende fünf ableitungsfreie Verfahren zur Nullstellenbestimmung stehen dem Anwender zur Auswahl:

- (1) eine Nullstellen einschließende Regula-falsi-Methode (Pegasus-Algorithmus)
- (2) eine modifizierte Regula falsi zur Bestimmung mehrfacher Nullstellen
- (3) ein Minimumsuchalgorithmus für den Betrag von f
- (4) ein Intervallhalbierungsverfahren
- (5) ein Algorithmus zur inversen quadratischen Interpolation von f.

Hinweise zur Programmabarbeitung

Alle Eingaben sind mit dem Drücken der Taste ENTER abzuschließen. Erscheint auf einem Bild rechts unten bzw. rechts oben die Aufforderung > ENTER< , so wird das Programm erst nach dem Betätigen der Taste ENTER fortgesetzt.

Das Programm signalisiert logisch falsche bzw. unsachgemäße Eingaben und erwartet anschließend eine sinnvolle Arbeit.

Bei der Aufforderung FUNKTIONSDEFINITION stellt das Programm den EDIT-Modus ein. In der Zeile 100 ist die gewünschte Funktion f mit einer "DEF FN"-Anweisung zu definieren. Der Name der Funktion heißt F.

Beispiel:

```
100 DEF FN F(X) = X-EXP(-X)
```

Der Anwender hat die Eingabe bzw. Korrektur in Zeile 100 mit dem Betätigen der Taste **ENTER** abzuschließen. Anschließend ist die Taste **STOP** zu drücken und nach dem Erscheinen der Aufforderung ">" ist die Anweisung GOTO 100 einzugeben.

- Nach der Eingabe der Intervallgrenzen a und b kann die definierte Funktion auf Wunsch in einem Print-Plot-Diagramm dargestellt werden. Dabei wird ein genaueres Einschließungsintervall für die a am nächsten liegende Nullstelle ermittelt. Es ist möglich, das ursprünglich eingegebene Intervall an dieser Stelle zu korrigieren.
- Danach kann eine Abbruchschränke für die Genauigkeit der Nullstelle bezüglich des Betrages von f angegeben werden (Standardwert ist 1E-5).
- Anschließend kann ein Verfahren zur Nullstellenbestimmung ausgewählt werden. Die Auswahl des Verfahrens kann auch dem Programm überlassen werden. Es ist möglich, auch während der Rechnung ein anderes Verfahren auszuwählen.
- Die Verfahren (1), (4) und (5) fordern bez. a und b die Bedingung $f(a) * f(b) < 0$. Für das Verfahren (2) ist $f(a) \neq f(b)$ eine notwendige Bedingung. Beim Verfahren (3) ist $f(a) * f(b) > 0$ zu gewährleisten.
- Besitzt die Funktion f in [a,b] Funktionswerte unterschiedlicher Größenordnungen, ist mit dem Einfluß von Rundungsfehlern auf das Resultat zu rechnen.
- Bei sehr langsamer Konvergenz - z.B. bei flach verlaufenden Funktionen - ist ein Abbruch der einzelnen Verfahren vor dem Erreichen einer Nullstelle möglich.
- Wenn eine Funktion im vorgegebenen Intervall mehrere Nullstellen besitzt, können die einzelnen Verfahren unterschiedliche Nullstellen ermitteln.

- Ein Fehler bei der Abarbeitung der vom Anwender definierten Funktion (Programmzeile 100) führt zum Programmabbruch. Dabei können folgende Fehler auftreten:
 - § OV - Error (Maßnahme: Funktion skalieren bzw. Intervall [a,b] verändern)
 - § /0 - Error (Maßnahme: Intervall [a,b] verändern)
 - § SN - Error (Maßnahme: Funktionsdefinition in Zeile 100 korrigieren).

R+POLYNU

Kurzbezeichnung

Numerische Bestimmung aller Nullstellen eines reellen oder komplexen Polynoms.

Voraussetzungen

BASIC-ROM-Modul bzw. ein RAM-Erweiterungsmodul

Inhaltsbeschreibung

Das Programm berechnet nacheinander alle Nullstellen eines komplexen Polynoms n-ten Grades nach einem Verfahren von NICKEL (Literatur: NICKEL, Karl: Die numerische Berechnung der Wurzeln eines Polynoms. Zeitschrift Numerische Mathematik, Band 9, H. 1 (1966), S. 80-89). Anfangsnäherungen für die einzelnen Nullstellen brauchen vom Anwender nicht vorgegeben zu werden. Eine graphische Veranschaulichung der Lage der Nullstellen in der komplexen Zahlenebene ist möglich.

Hinweise zur Programmabarbeitung

- Alle Eingaben sind mit dem Drücken der Taste **ENTER** abzuschließen. Erscheint auf einem Bild rechts die Aufforderung > **ENTER** < , so wird das Programm erst nach dem Betätigen der Taste **ENTER** fortgesetzt.
- Das Programm signalisiert logisch falsche bzw. unsachgemäße Eingaben und erwartet anschließend eine sinnvolle Antwort.

- Nach der Eingabe des Polynomgrades ($n \leq 50$) sind die einzelnen Koeffizienten einzugeben. Eine anschließende Korrekturmöglichkeit besteht.
- Sobald eine Nullstelle numerisch bestimmt ist, wird sie ausgegeben. Sind alle Nullstellen bekannt, ist eine graphische Darstellung der Lage dieser Nullstellen in der komplexen Zahlenebene möglich. Danach können die Nullstellen erneut ausgegeben werden.
- Besitzt das Polynom betragsmäßig sehr große Koeffizienten, kann während der Rechnung Zahlenbereichsüberlauf (OV-Error) auftreten. In diesem Fall schafft eine Skalierung des Polynoms Abhilfe.

R+NLREG

Kurzbeschreibung

Berechnung der Quadratmittellösung von überbestimmten nichtlinearen Gleichungssystemen. Lösen nichtlinearer Regressionsaufgaben.

Voraussetzungen

BASIC-ROM-Modul bzw. ein RAM-Erweiterungsmodul

Inhaltsbeschreibung

Mit dem Programm kann eine Quadratmittellösung eines nichtlinearen überbestimmten Gleichungssystems $F(x) = 0$ aus m Gleichungen $F_1(x) = 0, F_2(x) = 0, \dots, F_m(x) = 0$ in n ($n \leq m$) Unbekannten $x = (x_1, \dots, x_n)$ nach einem gedämpften GAUSS-NEWTON-Verfahren (Literatur: Schwetlick, H.: Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979) berechnet werden.

Dabei können einerseits die m Funktionen F_1, F_2, \dots, F_m in den BASIC-Zeilen 2000 bis 2800 direkt angegeben werden oder andererseits eine von den n Parametern x_1, x_2, \dots, x_n nichtlinear abhängende Ansatzfunktion

$$y = Q(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (*)$$

definiert und m ($\geq n$) Meßpunktpaare (t_j, y_j) , $j=1, 2, \dots, m$, eingegeben werden, die durch den funktionalen Zusammenhang (*) approximiert werden sollen. Zur Bestimmung der im Vektor x zusammengefaßten Parameter x_1, \dots, x_n im Sinne der GAUSSschen Fehlerquadratmethode wird im zweiten Fall das überbestimmte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1(x) &:= Q(t_1, x_1, x_2, \dots, x_n) - Y_1 \\ F_2(x) &:= Q(t_2, x_1, x_2, \dots, x_n) - Y_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ F_m(x) &:= Q(t_m, x_1, x_2, \dots, x_n) - Y^m \end{aligned}$$

generiert.

Im Spezialfall $m = n$ bearbeitet dieses Programm ein n -dimensionales nichtlineares Gleichungssystem mit dem gedämpften NEWTON-Verfahren. Die in jedem Iterationsschritt anfallenden (überbestimmten) linearen Gleichungssysteme werden mit dem HOUSEHOLDER-Verfahren gelöst. Damit wird die Bildung des schlecht konditionierten Normalgleichungssystems vermieden.

Im vorliegenden Programm sind die beiden Problemdimensionen m und n aus numerischen Gründen durch die Zahl 30 beschränkt.

Hinweise zur Programmabarbeitung

- Alle Eingaben sind mit dem Drücken der Taste ENTER abzuschließen. Erscheint auf einem Bild rechts unten die Aufforderung $>ENTER <$, so wird das Programm erst nach dem Betätigen der Taste ENTER fortgesetzt.
- Das Programm signalisiert logisch falsche bzw. unsachgemäße Eingaben und erwartet anschließend eine sinnvolle Antwort.
- Zunächst kann der Anwender auswählen, ob er die Funktionen $FX(1) = F_1, FX(2) = F_2, \dots, FX(M) = F_m$ angeben will (Nullstellenaufgabe) oder eine nichtlineare Ansatzfunktion $Q = Q(t, x_1, \dots, x_n)$ definieren möchte (nichtlineare Regression).

- Daraufhin stellt das Programm den EDIT-Modus ein.

- Im Fall der Nullstellenaufgabe stehen die Anweisungszeilen 2000 bis 2800 zur Definition der Funktionen F_1, F_2, \dots, F_m zur Verfügung. Die Funktionswerte der Funktionen F_1, F_2, \dots, F_m , die von den zu bestimmenden Variablen $X(1) = x_1, X(2) = x_2, \dots, X(N) = x_n$ abhängen, sind den Elementen $FX(1), FX(2), \dots, FX(M)$ des Vektors FX zuzuweisen. Falls der Anwender weitere Größen zur Beschreibung der Funktion benötigt, kann er aus einem Buchstaben gebildete Bezeichnungen frei verwenden. Das Programm benutzt intern mit Ausnahme des Vektors X nur zweibuchstabile Identifikatoren.

Beispiel:
 $F_1(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_1$
 $F_2(x_1, x_2, x_3) = 10(x_2 - x_1 x_1)$
 $F_3(x_1, x_2, x_3) = 20(x_3 - x_2 x_2)$

Definition:
 2000 $FX(1) = 1 - X(1) : A = 10$
 2010 FOR I=1 TO 2 :
 $FX(I+1) = I * A * (X(I+1) - X(I) * X(I))$
 2020 NEXT

Nachdem alle m Funktionen definiert sind, ist die Taste **STOP** zu drücken. Zur Fortsetzung des Programms ist die Taste **RUN** zu betätigen. Danach wird die Eingabe der Problemdimensionen m und n erwartet. Das Programm kann dabei nicht überprüfen, ob die eingegebenen Dimensionen m und n tatsächlich mit denen der in den Anweisungszeilen 2000 bis 2800 definierten Funktionen übereinstimmen.

- Zur Definition der nichtlinearen Ansatzfunktion $Q(t, x_1, \dots, x_n)$ sind die Anweisungszeilen 1000 bis 1800 reserviert. Dabei hängt die Ansatzfunktion Q von der Meßstelle t und den zu schätzenden Parametern $X(1) = x_1, X(2) = x_2, \dots, X(N) = x_n$ ab. Der Wert der Ansatzfunktion $Q(T), X(1), \dots, X(N)$ ist der Größe Q zuzuweisen, wobei T von dem Programm nacheinander mit den Meßstellenwerten t_1, t_2, \dots, t_m belegt wird. Falls der Anwender weitere Größen zur Beschreibung der Ansatzfunktion benötigt, kann er aus einem Buchstaben gebildete Bezeichnungen frei verwenden. Das Programm benutzt intern nur zweibuchstabile Identifikatoren.

Beispiel: $Q(t, a, b) = a \sin(bt)$ mit $x_1 = a$ und $x_2 = b$

Definition: $1000 Q = X(1) * SIN(X(2) * T)$

Nachdem die Ansatzfunktion entsprechend definiert ist, ist die Taste **STOP** zu drücken. Die Fortsetzung des Programms erfolgt nach dem Betätigen der Taste **RUN**. Danach wird die Eingabe der Problemdimensionen m und n erwartet. Das Programm kann dabei nicht überprüfen, ob die eingegebene Dimension n tatsächlich mit der in den Anweisungszeilen 1000 bis 1800 festgelegten Anzahl der zu schätzenden Parameter $x(1) = x_1, \dots, X(N) = x_n$ übereinstimmt. Anschließend können die Meßpunktpaare $(T(J), Y(J))$, $J = 1, 2, \dots, M$, mit $I(J) = t_j$ und $Y(J) = y_j$ eingegeben werden. Eine Korrekturmöglichkeit der angezeigten Meßpunktpaare ist jeweils vorgesehen.

- Für die zu ermittelnden $X(1), \dots, X(N)$ ist bei beiden Aufgabenstellungen eine Startnäherung einzugeben. Nach vollständiger Eingabe des Vektors X besteht Korrekturmöglichkeit.

- Während der Rechnung wird zur Beobachtung des Verfahrens ein Protokoll ausgegeben, das pro Iterationsschritt die Euklidische Norm des Funktionswertvektors FX und die Euklidische Norm des Gradienten der Fehlerquadratsumme $(F_1(x))^2 + (F_2(x))^2 + \dots + (F_m(x))^2$ bei beiden Aufgaben enthält. Auf Wunsch kann pro Iterationsschritt außerdem die Schrittweite Γ (Dämpfungsparameter), der GOLDSTEIN-Quotient und die Euklidische Norm des Korrekturvektors bezüglich der Iterierten aus dem vorangehenden Iterationsschritt angezeigt werden.

- Bei stark nichtlinearen Problemen beziehungsweise bei ungünstigen Startnäherungen kann das Programm vorzeitig das GAUSS-NEWTON-Verfahren abbrechen. Es erfolgt dann die Ausschrift "Keine Verbesserung mehr möglich!". In vielen Fällen ist dem Verfahren mit anderen Startnäherungen mehr Erfolg beschieden.

- Ein Fehler bei der Abarbeitung der vom Anwender definierten Funktionen F_1, \dots, F_m bzw. Ansatzfunktion führt zum Programmabbruch. Dabei können folgende Fehler auftreten:
 - § OV - Error (Maßnahme: Funktionen F_i bzw. Ansatzfunktionen skalieren oder andere Startnäherung vorgeben)
 - § /0 - Error (Maßnahme: Funktionen F_i bzw. Ansatzfunktion überprüfen oder andere Startnäherung vorgeben)
 - § SN - Error (Maßnahme: Definition der Funktionen F_i bzw. der Ansatzfunktion korrigieren)
- Bei stark nichtlinearen Funktionen F_1, \dots, F_m bzw. bei einer stark nichtlinearen Ansatzfunktion kann während der Rechnung Zahlenbereichsüberlauf auftreten. Zur Abhilfe kann das Skalieren der Funktionen F_1, \dots, F_m bzw. der Ansatzfunktion Q empfohlen werden. Mitunter reicht auch schon die Vorgabe einer anderen Startnäherung aus, um diesen Effekt zu verhindern.
- Bei der Bearbeitung einer Nullstellenaufgabe im Fall $m = n$ kann das GAUSS-NEWTON-Verfahren ordnungsgemäß enden, obwohl keine Lösung des Gleichungssystems $F(x) = 0$ berechnet werden konnte (Der im Protokoll ausgewiesene Defekt ist wesentlich größer als 0). Zur Bestimmung einer Nullstelle sollte das Programm neu gestartet werden, wobei jetzt eine andere Startnäherung eingegeben werden muß.

Korrektur im Programm R+NLREG

Zeile 85 ändern in:

```
85 IFPEEK(-4985)=65THENNR=1:ELSEN=2
```